NEFN 3

Nový nadpis 23.2.2010

2. LINEÁRNÍ OPERÁTORY NA HILBERTOVÝCH PROSTORECH

V dalším předpokládejme, že

$$\boxed{T : H \to H}$$

a že T je lineární (nemusí být nutně definován na celém H)
H je Hilbertův prostor

- Příklady

1)
$$\boxed{\begin{array}{ll} T : L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi) & \\ Tu := -u'' & \mathcal{D}(T) = C^2(\langle 0,\pi\rangle) \\ & \mathrm{Im}(T) = C(\langle 0,\pi\rangle) \end{array}}$$

T je lineární, ale ne omezený

(Stačí vzít $u_n(x) := \sin nx$

Pak $(Tu_n)(x) = +n^2 \sin(nx) = n^2 u_n(x)$, a proto

$\|Tu_n\| = n^2 \cdot \|u_n\| \ldots$)

---

2) Buď $g \in C(\langle 0,1\rangle)$ a buď

$$\boxed{\begin{array}{l} T : L^2(0,1) \to L^2(0,1) \\ (Tu)(x) := g(x)u(x) \end{array}}$$

- $\mathcal{D}(T) = L^2(0,1)$
- T je zřejmě <u>lineární</u>
- T je omezený, a proto i <u>spojitý</u>

$$\left(\|Tu\| = \left(\int_0^1 |g(x)|^2 \cdot |u(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \le \left(\max_{x \in \langle 0,1 \rangle} g^2(x)\right)^{1/2} \cdot \|u\| \right)$$

- <u>Pozorování a definice</u>

Buď $T \in \mathcal{L}(H,H) \overset{\text{ozn.}}{=} \mathcal{L}(H)$

a <u>$v \in H$ libovolný bod</u>.

Uvažujme zobrazení $F_v : H \to \mathbb{R}$

$$F_v(u) := (v, Tu)$$

Toto zobrazení F_v je zřejmě

- <u>lineární</u>
- <u>omezené</u> $\left(|F_v(u)| = |(v, Tu)| \overset{\text{C.S.B.}}{\le} \|v\| \cdot \|Tu\| \le \|v\| \cdot c \cdot \|u\| \right)$

T je omezený

Tzn. $F_v \in H^*$. A z Rieszovy věty

z reprezentace vyplývá, že $\exists!\, w \overset{\text{ozn.}}{=} T^* v \in H$

takové, že $\forall u \in H$: $F_v(u) = (w, u)$

$$\underline{(v, Tu)} = \underline{(T^* v, u)} \qquad (*)$$

Operátor $T^*: H \to H$ definovaný na H vztahem $(*)$ nazýváme <u>adjungovaným operátorem</u> (k operátoru T)

• <u>Pozorování.</u> Všimněme si, že při ztotožnění $H = H^*$ (pomocí Rieszovy věty), je

$$(T^* v, u) = (v, Tu)$$

$$T^* v \in H^* \qquad \qquad v \in H^*$$

$$(T^* v)(u) = v(Tu)$$

$$T: H \to H$$

$$H^* \leftarrow H^* : T^*$$

$$\boxed{\text{adjungovaný operátor}} \equiv \boxed{\text{duální operátor}}$$

(viz NEFN 2, odd. 2)

(a platí pro něj vše dříve řečené o duál. oper.)

Často se v aplikacích objevují <u>lineární</u> (ne nutně spojité) operátory

$$T : H \to H$$

jejichž definičním oborem <u>není celé H</u>.

Pro takovéto operátory je definice adjungovaného [illegible] složitější.

Definice. Buď $T : H \to H$ lineární a buď $\mathcal{D}(T)$ hustý v H (tzn. $\overline{\mathcal{D}(T)} = H$).

Označme

$$\mathcal{D}(T^*) = \{ u \in H : \exists w \in H \ \forall v \in \mathcal{D}(T) : (u, Tv) = (w, v) \}$$

Dá se ukázat, že pro každé $u \in \mathcal{D}(T^*)$ je odpovídající prvek w určen <u>jednoznačně</u>; píšeme $w =: T^* u$.

to plyne z hustoty $\mathcal{D}(T)$

Dk. – D.Ú.

Operátor $T^* : H \to H$ definovaný na $\mathcal{D}(T^*)$ vztahem

$$(T^* u, v) = (u, Tv) \quad \forall v \in \mathcal{D}(T)$$

nazýváme <u>adjungovaným operátorem</u> k T

Poznámka. Dá se ukázat, že
$\mathcal{D}(T^*)$ je uzavř. podprostorem H
a že $T^*: H \to H$ je (na $\mathcal{D}(T^*)$) lineární
(nemusí být spojitý!).

Je-li $\mathcal{D}(T) = H$ a je-li operátor T navíc omezený, je $\mathcal{D}(T^*) = H$
a T^* je adjungovaný ve smyslu definice ze strany 2–3.

Definice. Buď $T: H \to H$ lineární
a buď $\mathcal{D}(T)$ hustý v H.
Řekneme, že T je symetrický, je-li

- $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$,
- $T^* u = Tu$ pro každé $u \in \mathcal{D}(T)$.

Jinak řečeno:

T je symetrický, platí-li

$$\boxed{\forall u, v \in \mathcal{D}(T): \ (u, Tv) = (Tu, v)}$$

- **Věta (Hellinger, Toeplitz)**

Buď $T: H \to H$
- lineární
- $\mathcal{D}(T) = H$
- $\forall u, v \in H: \ (u, Tv) = (Tu, v)$.

Pak T je omezený.

(Tzn. symetrický lineární operátor definovaný na celém H, je už nutně spojitý)

- **Definice.** Lineární operátor $T: H \to H$ definovaný na hustém podmnožině $\mathcal{D}(T) \subset H$ se nazývá samoadjungovaný, je-li symetrický a platí-li $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$

(tzn. $T^* = T$).

- **Příklady.**

1) $\boxed{\begin{array}{l} T: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \\ \mathcal{D}(T) = W^{2,2}(\mathbb{R}), \quad Tu := -u'' \end{array}}$

Operátor T je samoadjungovaný.

(N.P. $\mathcal{D}(T) = C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ..... T je symetrický, ale ne samoadjungovaný)

2) $$\boxed{\begin{gathered} T: L^2(0,1) \to L^2(0,1) \\ (Tu)(x) := \int_0^x u(t)\,dt \end{gathered}}$$

$\mathcal{D}(T) = L^2(0,1)$, T **není** samoadjungovaný.